TD sur la méthode des moindres carrés 27/29 février 2008

Prérequis : Algèbre linéaire, moindres carrés, formulation d'un problème, équations normales, existence et unicité de la solution.
Durée : 1 h 40 + 10 min (feed-back)

TD 6 – Moindres carrés

Exercice 1

/ Formulation d'un problème de moindres carrés */*

On considère une quantité physique scalaire z qui varie selon deux autres paramètres physiques x et y. On entreprend une série de m mesures $\{(x_i, y_i, z_i), 1 \leq i \leq m\}$ et l'on essaie de déterminer un modèle « raisonable » $z = f(x, y)$ donnant directement z en fonction de x et y.

1. On utilise $f_1(x, y) = a + bx + cy$ comme premier modèle. On détermine ses trois paramètres $a, betc$ par moindres carrés. Écrire ce problème sous la forme standard :

$$\min_{v \in \mathbb{R}^3} \| Mv - z \|^2$$

   Écrire une fonction matlab `matrice_modele_lin(x,y)` qui calcule la matrice M.

2. Même question avec le modèle à 6 paramètres :

$$f_2(x, y) = f_1(x, y) + dx^2 + exy + fy^2$$

3. Écrire un script Matlab qui, étant donné les 3 vecteurs x, y et z, calcule les coefficients du problème de moindres carrés des deux modèles précédents en résolvant les équations normales.

Exercice 2

/ Extrait examen */*

1. Donner un ou plusieurs intérêts (pas la méthode) des moindres carrés.
2. On cherche à expliquer la note y obtenue par chaque étudiant à son examen de mathématiques numériques par le temps t qu'il a passé à tavailler la matière et l'effort z qu'il prétend avoir fourni selon la relation suivante :

$$y = f(z, t) = t^{\alpha}\, z^{\beta}\, e^{\gamma}$$

   où α, β et γ sont les paramètres à déterminer. On dispose pour cela des données correspondantes pour n étudiants : $(y_i, z_i, t_i)_{1 \leq i \leq n}$. Pour pouvoir utiliser la méthode des moindres carrés, il faut que la relation soit linéaire en ses paramètres, ce qui s'obtient en travaillant sur $\log(y)$. Exprimer alors le problème sous forme standard :

$$\min_u || A\, u - v ||^2$$

   en explicitant A, u et v.

3. Ecrire les équations normales du problème en fonction des quantités suivantes :

$$\begin{array}{lll} S_t = \sum_{i=1}^n \log(t_i) & SC_t = \sum_{i=1}^n \log^2(t_i) & S_z = \sum_{i=1}^n \log(z_i) \\ SC_z = \sum_{i=1}^n \log^2(z_i) & S_y = \sum_{i=1}^n \log(y_i) & S_{yz} = \sum_{i=1}^n \log(y_i)\log(z_i) \\ S_{yt} = \sum_{i=1}^n \log(y_i)\log(t_i) & S_{zt} = \sum_{i=1}^n \log(z_i)\log(t_i) & \end{array}$$

4. On suppose que l'on dispose des deux fonctions matlab suivantes :

- `[LU info] = factorisation_lu(M)` qui fournit la décomposition LU "en place" de la matrice M
- `x = descente_remontee(LU,b)` qui fournit la solution x de l'équation $Mx = b$ où LU est la décomposition LU "en place" de M.

Ecrire une fonction Matlab `[alpha beta gamma] = pmc(y,z,t)` qui réalise ces calculs.

Exercice 3

/ Exemple de calcul */*

Soient $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

Trouvez la solution au sens des moindres carrés de l'équation $Ax = b$ et l'erreur correspondante.

Exercice 4

/ Unicité de la solution */*

Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ avec $m \geq n$.

1. Donnez la définition de $\mathrm{Ker}(A)$.
2. Montrez que $\mathrm{Ker}(A) \subset \mathrm{Ker}(A^\top A)$.
3. Montrez que si $A^\top Ax = 0$ alors, $x^\top A^\top Ax = 0$.
4. Déduisez-en que $\mathrm{Ker}(A^\top A) \subset \mathrm{Ker}(A)$.
5. Déduisez-en que $\mathrm{Ker}(A^\top A) = \mathrm{Ker}(A)$ et que $\mathrm{Rang}(A^\top A) = \mathrm{Rang}(A)$.
6. On admet que les équations normales
$$A^\top Ax = A^\top b$$
admettent au moins une solution x quelque soit A. Montrez que cette solution est unique si et seulement si $\mathrm{Rang}(A) = n$. Exprimez alors x en fonction des données du problème.

Exercice 5

/ Approche analytique des équations normales */*

1. Soit $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\, b \,|\, x \,)$ Calculez ∇f_1.
2. Même question avec $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto (\, Gx \,|\, x \,) = x^\top Gx$ avec $G \in \mathcal{M}_{n,n}$. Simplifiez l'expression dans le cas où $G \in \mathcal{S}_{n,n}$.
3. Soient $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ telle que $Ker(A) = \{0\}$ et $b \in \mathbb{R}^m$. On appelle fonction erreur la fonction suivante :
$$\begin{array}{rccl} E : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \|\, Ax - b \,\|^2 \end{array}$$
   a) développez la fonction erreur pour obtenir une forme quadratique
   b) calculez sa dérivée puis retrouver les équations normales
   c) (*) une autre méthode pour montrer que la solution x^* des équations normales est bien le vecteur réalisant le minimum de E est de montrer directement que $\forall x \neq x^*,\ E(x) > E(x^*)$. Pour cela, il faut développer $q(x) = E(x) - E(x^*)$ en utilisant les équations normales et montrer que $q(x) > 0$ pour tout $x \neq x^*$ en utilisant le fait que $A^\top A$ est « définie positive ».