École Supérieure d'Informatique et Applications de Lorraine – 1ère année
Rédacteurs : Francis Alexandre, Tony Bourdier
Date : Mercredi 27 février 2008
Durée : 2 heures

Examen – Mathématiques Discrètes 2

Calculatrices, machines électroniques et ordinateurs portables **non autorisés**.
Remarques : La clarté de la rédaction est un élément important de l'évaluation. Le barême est donné à titre indicatif. Cet énoncé est composé de plusieurs parties indépendantes. Il n'est pas demandé de traiter les parties dans l'ordre dans lequel elles sont présentées.
Merci de composer sur deux copies séparées[1].

1. Logique des propositions /* 2.5 points */

(a) *(0.5 point)* Donnez la définition d'une tautologie

(b) *(2 points)* Donnez la forme clausale de la formule suivante :

$$\alpha \;=\; \Big(\big\{p \wedge (q \Rightarrow r)\big\} \Rightarrow s\Big) \Rightarrow \Big(\big\{(\neg p \vee q) \vee s\big\} \wedge \big\{\neg\big[p \wedge (r \wedge \neg s)\big]\big\}\Big)$$

et conclure quant à la nature de cette dernière.

2. Logique des prédicats /* 7.5 points */

2.1. Sémantique /* 2.5 points */

(a) *(0.5 point)* Rappelez la définition d'un modèle en logique du premier ordre

(b) *(2 points)* Soient α_1, α_2 et α_3 trois formules :

$$\begin{cases} \alpha_1 = (\exists x)(p(y,x)) \\ \alpha_2 = (\forall x)(r(x) \Rightarrow p(x,x)) \\ \alpha_3 = (x = a \vee (\forall y)(\forall z)(f(y,z) = x) \vee p(x,x)) \end{cases}$$

où $r \in \mathcal{R}_1,\ p \in \mathcal{R}_2,\ a \in \mathcal{F}_0,\ f \in \mathcal{F}_2$ et I une interprétation telle que :

- $|\,I\,| = \{A, B, C\}$
- $I(p) = \{(A,B), (C,C), (B,A)\}$
- $I(r) = \varnothing$
- $I(a) = A$
- $I(f) : \begin{cases} |\,I\,|^2 & \rightarrow & |\,I\,| \\ (x,y) & \mapsto & B \end{cases}$

Pour chaque formule, dites si I est ou n'est pas un modèle (justifiez précisément).

2.2. Théorème de la logique du premier ordre /* 5 points */

(a) *(1 point)* Rappelez la définition du système formel de Robinson.

(b) *(4 points)* La formule suivante est-elle un théorème de la logique du premier ordre ?

$$\alpha = \exists x \exists y \forall t \left[\Big\{\neg\big(q(u) \Rightarrow p(t)\big)\Big\} \vee \Big\{\big(\forall y (p(y) \Rightarrow s(y,x))\big) \Rightarrow \big(\exists x \exists z \big[s(x,u) \vee (\neg q(z) \wedge \neg q(u))\big]\big)\Big\}\right]$$

où $p, q \in \mathcal{R}_1,\ s \in \mathcal{R}_2$.

[1] Parties 1 et 2 sur une copie et parties 3 et 4 sur une autre

3. Analyse syntaxique descendante
/* *10 points* */

3.1. Préambule
/* *3 points* */

(*a*) *(1 point)* Soit la grammaire $G_1 = (\{A, B, C, D\}, \{a, b, c, d\}, \rightarrow_1, A)$ où $\rightarrow_1$ est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} A & \rightarrow & BC \mid D \mid a \\ B & \rightarrow & bB \mid \epsilon \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} C & \rightarrow & cC \mid \epsilon \\ D & \rightarrow & dD \mid \epsilon \end{array}\right.$$

G_1 est-elle LL(1) ? (justifier précisément votre réponse)

(*b*) *(2 points)* Soit la grammaire $G_2 = (\{S, Y, X, Z\}, \{a, b, e\}, \rightarrow_2, S)$ où $\rightarrow_2$ est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & Y \\ Y & \rightarrow & YZ \mid Ya \mid b \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} X & \rightarrow & e \\ Z & \rightarrow & ZX \end{array}\right.$$

Réduisez G_2, soit G'_2 la grammaire obtenue. Qu'est-ce qui empêche de faire l'analyse descendante de G'_2 ? Remédier à ce problème en déterminant une grammaire G''_2 équivalente à G'_2 (on ne demande pas d'analyser G''_2). En déduire le langage engendré par G_2.

3.2. Descente récursive
/* *4 points* */

(*a*) *(3 points)* Soit la grammaire $G_3 = (\{E, F, G\}, \{x, y, z, \uparrow, +, (,)\}, \rightarrow_3, E)$ où $\rightarrow_3$ est définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} E & \rightarrow & (EF + G) \mid G \mid \epsilon \\ F & \rightarrow & \uparrow G \mid \epsilon \\ G & \rightarrow & x \mid y \mid z \end{array}\right.$$

Après avoir vérifié que G_3 est LL(1), écrivez les procédures d'analyse correspondant à G_3 (programme principal, procédure d'analyse d'un terminal et procédure d'analyse de chaque non-terminal).

(*b*) *(1 point)* Donnez le résultat de l'analyse du mot $((x + z) \uparrow y + z)$

3.3. Analyse descendante non-récursive
/* *3 points* */

(*a*) *(2 points)* Soit $G_4 = (\{X, A, B, C, D\},\ \{a, b, c, d\}, \rightarrow_4, X)$ avec $\rightarrow_4$ définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} X & \rightarrow & AB \\ A & \rightarrow & CD \\ B & \rightarrow & c \mid \epsilon \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{lcl} C & \rightarrow & aCd \mid \epsilon \\ D & \rightarrow & bbD \mid \epsilon \end{array}\right.$$

Sachant que :

	X	A	B	C	D
Premiers	$\{a, b, c\}$	$\{a, b\}$	$\{c\}$	$\{a\}$	$\{b\}$
Suivants	$\{\$\}$	$\{c, \$\}$	$\{\$\}$	$\{b, c, d, \$\}$	$\{c, \$\}$

Construisez la table d'analyse prédictive de G_4. Cette grammaire est-elle LL(1) ? (justifiez)

(*b*) *(1 point)* Analysez le mot $adbb\$$.

4. Logique du premier ordre : clauses définies
/* *2 points* */

On suppose donné un langage de la logique du premier ordre. Une *clause définie* est une clause comportant exactement un littéral positif.

(*a*) Montrer que tout ensemble de clauses définies admet un modèle de Herbrand

(*b*) Montrer que l'intersection de deux modèles de Herbrand d'un ensemble $\mathcal{A}$ de clauses définies est un modèle de $\mathcal{A}$. Montrer que cette propriété n'est pas vraie pour un ensemble de clauses quelconques.

(*c*) Déduire de la question précédente que tout ensemble $\mathcal{A}$ de clauses définies admet un plus petit modèle de Herbrand.